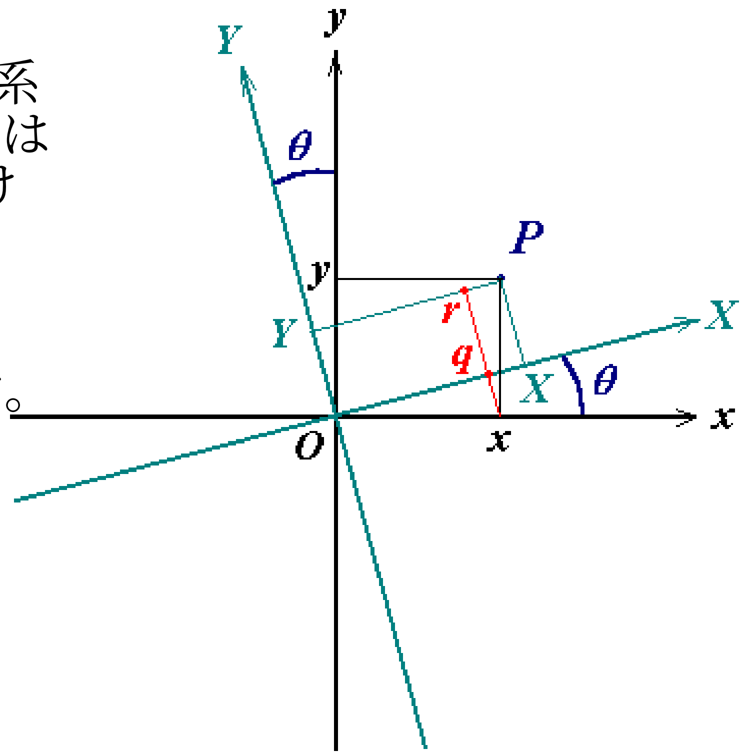
ｸﾞﾗﾌの回転

平面上のｸﾞﾗﾌを回転させて見ましょう。
Microsoft Excel を使って図を描いてみます。
どんな式になるのかも勉強しましょう。

by M.Nakao

平面図形の回転-1

平面の座標系を回転するとどうなるか？
について調べます。
図のように原点Oを共有する２つの座標系
$O-xy, O-XY$を考えます。座標系$O-XY$は
$O-xy$に対して、反時計回りに角度θだけ
回転しているとします。
点Pの座標が、座標系$O-xy$で(x,y)、
座標系$O-XY$で(X,Y)、と表されると
すると、この間には次の関係があります。



$$\left.\begin{array}{l} X = x\cos\theta + y\sin\theta \\ Y = y\cos\theta - x\sin\theta \end{array}\right\} \quad \cdots \quad (1)$$

x, y, X, Yはそれぞれの座標系での点Pの
「座標値」ですが、図のようにそれぞれ
の座標軸に点Pから下した垂線と座標軸
の交点の名前だと言う事にしましょう。
例えば、線分$\overline{Px}$とx軸は直交しています。
補助線を、点xから$\overline{PX}$に平行に引いて、X軸との交点をq、$\overline{PY}$との交点をr
とします。図から、$\overline{Oq} = x\cos\theta$が判ります。また、$\angle Pxr = \theta$ですから、
$\overline{qX} = \overline{rP} = y\sin\theta$が判ります。$X$の値$= \overline{OX} = \overline{Oq} + \overline{qX}$なので、(1)の第１式が
成立する事が判りますね。
第２式も同じようにして成立します。どんな補助線を引くと、判りやす
いかを考えてみましょう。

補足説明(1)-1

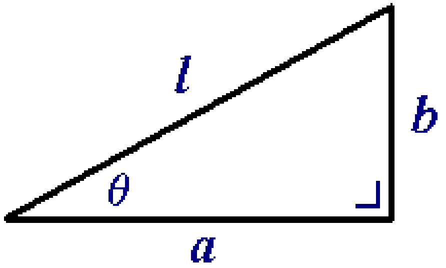
①角度について

小学校等では、角度を 表すのに「度」を使い ますね。
例えば、30°,90°等と書きます。仕事等 では「ラジアン」を使 います。
「ラジアン」は1回転 （360°）が2πです。「π」は「円周率」です。
「円周」は円の回りの 長さです。「円周率」＝円周÷半径でしたね。

例えば、$180° = \pi$ﾗｼﾞｱﾝ、$90° = \dfrac{\pi}{2}$ﾗｼﾞｱﾝ、$30° = \dfrac{\pi}{6}$ﾗｼﾞｱﾝ、等となり ます。

これからは、角度に全 て「ﾗｼﾞｱﾝ」を使 います。
また、「ﾗｼﾞｱﾝ」はいちいち「…ﾗｼﾞｱﾝ」とは言わ ないで使うのが普通です。つまり、「角度$\dfrac{\pi}{4}$」となっていたら、45°の事を言っている訳です。

②三角関数



図のような直角三角形 を考えます。
長さbの辺に向かい合った角 度をθとします。

正弦：$\sin\theta = \dfrac{b}{l}$:$\sin\theta$は「ｻｲﾝｼｰﾀ」と 読みます。

余弦：$\cos\theta = \dfrac{a}{l}$:$\cos\theta$は「ｺｻｲﾝｼｰﾀ」 と読みます。

正接：$\tan\theta = \dfrac{b}{a}$:$\tan\theta$は「ﾀﾝｼﾞｪﾝﾄｼｰﾀ」と読みます。

補足説明(1)-2

②三角関数（続き）

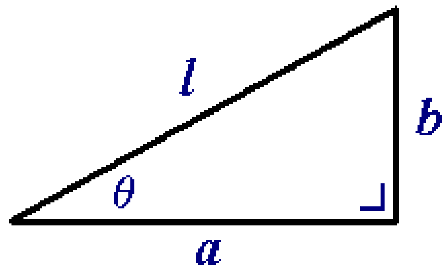
辺の長さの比率名を全 部挙げておきましょう 。

正割：$\sec\theta = \dfrac{l}{b}$:$\sec\theta$ は「ｾｶﾝﾄｼｰﾀ」 と読みます。

余割：$\mathrm{cosec}\,\theta = \dfrac{l}{a}$:$\mathrm{cosec}\,\theta$ は「ｺｾｶﾝﾄｼｰﾀ 」 と読みます。

余接：$\cot\theta = \dfrac{a}{b}$:$\cot\theta$ は「ｺﾀﾝｼﾞｪﾝﾄ ｼｰﾀ」 と読みます。

$$\left.\begin{array}{l} \sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta} \\ \mathrm{cosec}\,\theta = \dfrac{1}{\sin\theta} \\ \cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta} \end{array}\right\}$$ です。



「ピタゴラスの定理」 は憶えていますね？

$l^2 = a^2 + b^2 \rightarrow l = \sqrt{a^2 + b^2}$（「ﾙｰﾄ a ｼﾞｼﾞｮｳﾌﾟﾗｽ b ｼﾞｼﾞｮｳ」）

ですね。この式を使う と、例えば次のような 事が判ります。

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\sin^2\theta, \cos^2\theta$ はそれぞれ、$\sin\theta \times \sin\theta$, $\cos\theta \times \cos\theta$ の事で、

「ｻｲﾝｼﾞｼﾞｮｳ ｼｰﾀ」、 「ｺｻｲﾝ ｼﾞｼﾞｮｳｼｰﾀ」 と読みます。

平面図形の回転-2

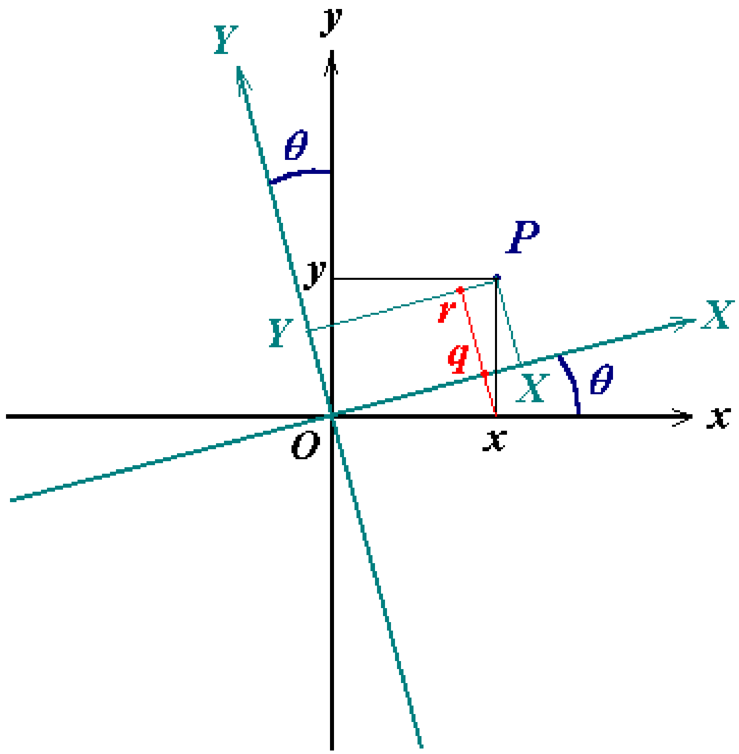
(1)式は次のように記述もできます。

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \cdots \quad (2)$$

$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ は「ﾍﾞｸﾄﾙ」（この場合は「座標ﾍﾞｸﾄﾙ」）で、$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ は「行列」（「ﾏﾄﾘｯｸｽ」と言う方が多い）(この場合は「座標変換ﾏﾄﾘｯｸｽ」）です。

(2)から、次のようにも記述できます。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad \cdots \quad (3)$$



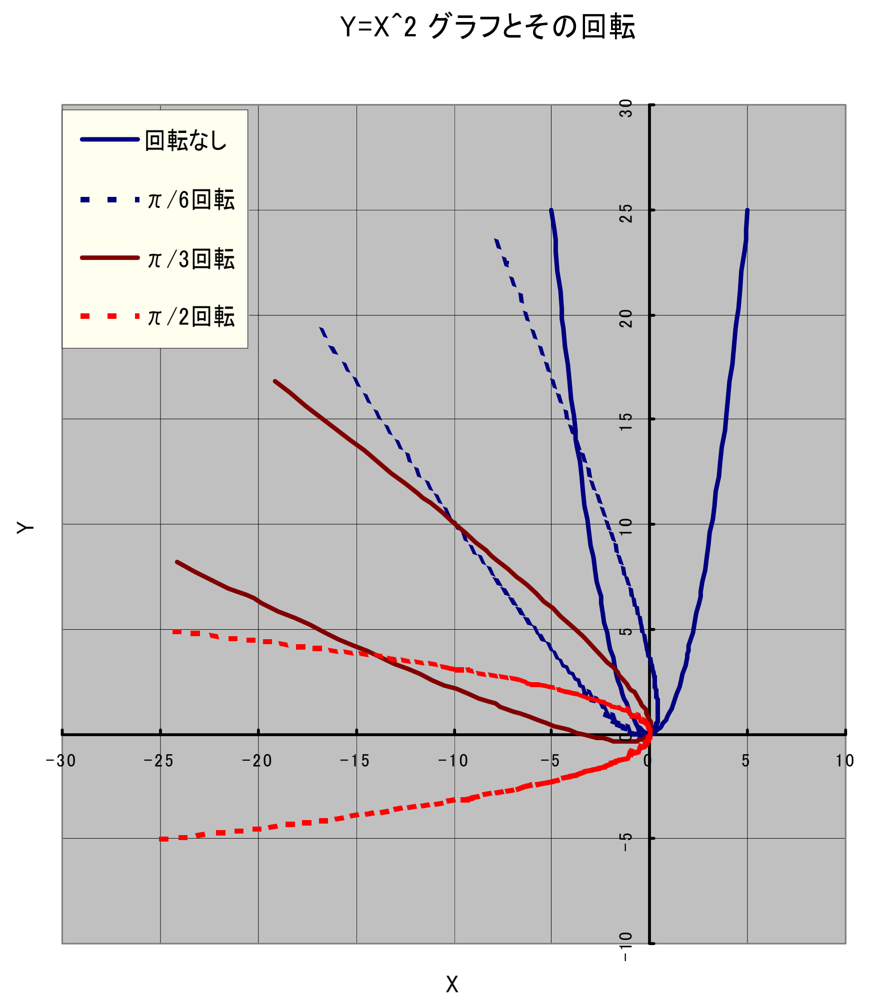
(2),(3)式共に、「同じ点」を２つの座標系で見た場合の関係式になっています。
これらの式を使って、「ｸﾞﾗﾌの回転」を行う事ができます。
つまり、座標系$O-XY$から見ていたｸﾞﾗﾌを座標系$O-xy$で見直す（座標変換する）と、反時計回りにθ回転した事と同じです。

平面図形の回転-3

例として、次式の放物線のｸﾞﾗﾌを回転してみます。

$$y = x^2 \quad \cdots \quad (4)$$

式は、(4)式のx, yに(1)又は(2)式のX, Yを代入すれば決定できます。



平面図形の回転-4

Excel を使用して行った作図 は、次の順です。x:[−5,5]を0.1ﾋﾟｯﾁで作図しました。
①「*A*」の列に xのﾃﾞｰﾀを作り、「*B*」の列に y(回転なし）のﾃﾞｰﾀを作る。
　yのﾃﾞｰﾀ作成用の「*B*1セル計算式」は、"= *A*1^2"。
②「*A*」の列の続きに 30° 回転用の xのﾃﾞｰﾀを作り、対応する「*C*」の列に yのﾃﾞｰﾀを作る。「*A*102セル計算式」は、"= *A1* * *0.866025* - *B1* * *0.5*"。
「*C*102セル計算式」は、"= *A1* * *0.5* + *B1* * *0.866025*"。
③「*A*」の列の続きに 60° 回転用の xのﾃﾞｰﾀを作り、対応する「*D*」の列に yのﾃﾞｰﾀを作る。「*A*203セル計算式」は、"= *A1* * *0.5* - *B1* * *0.866025*"。
「*C*203セル計算式」は、"= *A1* * *0.866025* + *B1* * *0.5*"。
④「*A*」の列の続きに 90° 回転用の xのﾃﾞｰﾀを作り、対応する「*E*」の列に yのﾃﾞｰﾀを作る。「*A*304セル計算式」は、"= -*B1*"。
「*C*304セル計算式」は、"= *A1*"。

式を作成して見ましょう。

$$\theta=\frac{\pi}{6}\ :\ 3x^2+2\sqrt{3}xy+y^2+2x-2\sqrt{3}y=0$$

$$\theta=\frac{\pi}{4}\ :\ x^2+xy+y^2+\sqrt{2}x-\sqrt{2}y=0$$ （図にはありません）

$$\theta=\frac{\pi}{3}\ :\ x^2+2\sqrt{3}xy+3y^2+2\sqrt{3}x-2y=0$$

$$\theta=\frac{\pi}{2}\ :\ y^2-x=0$$

平面図形の回転-5

次式の楕円を x:[−10,10]について、「回転なし」、「$\frac{\pi}{6}$回転」、「$\frac{\pi}{3}$回転」、「$\frac{\pi}{2}$回転」の４ｸﾞﾗﾌを、*Excel* を使用して作図してみて下さい。

$$\left(\frac{x}{10}\right)^2+\left(\frac{y}{5}\right)^2=1 \quad \cdots \quad (5)$$

結果だけ、示しておきます。

また、式だとどうなるかも作成して見ましょう。

平面図形の回転-6

楕円の回転例