

1 複素関数

1.1 複素数についての復習

・記号 i は虚数単位を表す. 従って $i^2 = -1$. どの複素数もある実数 x, y を用いて $x + iy$ の形に表せる. 複素数 $x + iy$ の 実数部 とは x , 虚数部 とは y のことである. 実数は虚数部が 0 の複素数と見なせる.

・2つの複素数が等しいのは, それらの実数部が等しく, 虚数部も等しいときである:

$$a + ib = c + id \quad \Leftrightarrow \quad a = c, \quad b = d \quad (1.1)$$

・実数 x の絶対値 $|x|$ は

$$|x| = \sqrt{x^2} \quad (1.2)$$

と表せる. 複素数 $x + iy$ の 絶対値 $|x + iy|$ は

$$|x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (1.3)$$

により定められる. 特に, $|i| = |0 + 1i| = 1$ である. 複素数の絶対値 (1.3) は, 絶対値内に書かれた数が実数なら (つまり $y = 0$ なら) 実数の絶対値 (1.2) と同じものとなる.

問. $z = 3 - 4i$ のとき $|z|$ を求めよ.

解.

$$\begin{aligned} |z| &= |3 - 4i| = |3 + (-4)i| \\ &= \sqrt{3^2 + (-4)^2} \quad ((1.3) \text{ より}) \\ &= 5. \end{aligned}$$

・どのような複素数 z, w に対しても, 次の式が成り立つ:

$$\begin{aligned} |zw| &= |z||w|, \\ |z + w| &\leq |z| + |w| \end{aligned} \quad (1.4)$$

・複素数 $x + iy$ の 複素共役 とは $x - iy$ のことである。複素数 z の複素共役を $\bar{z}$ で表す。つまり

$$z = x + iy \quad \Rightarrow \quad \bar{z} = x - iy. \quad (1.5)$$

問. 複素数 z に対し $\bar{z}z = |z|^2$ が成り立つことを示せ.

解. z を $z = x + iy$ と表せば

$$\begin{aligned} \bar{z}z &= (x - iy)(x + iy) \quad ((1.5) \text{ より}) \\ &= x^2 + y^2 \\ &= |z|^2 \quad ((1.3) \text{ より}) \end{aligned}$$

・複素数 z, w に対し、次の式が成り立つ：

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w} \quad (1.6)$$

$$\overline{zw} = \bar{z}\bar{w} \quad (1.7)$$

・次図のように、複素数は平面上の点として表せる：

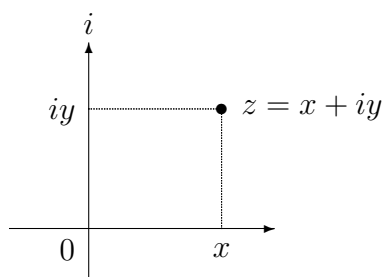


図 1: 複素平面

このように平面に複素数 $z = x + iy$ の x と iy を表すための縦軸と横軸を書いたものを、複素平面 と呼ぶ。横軸を 実軸，縦軸を 虚軸 と呼ぶ。

・次の図2のように、複素平面原点と複素数 z を結ぶ線分の長さを r とし、この線分が実軸となす角度を θ とする。

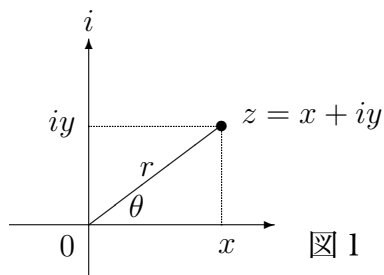


図 2: r と θ

図からわかるように, $x = r \cos \theta$, $iy = ir \sin \theta$ である. 従って図の z は

$$z = r \cos \theta + ir \sin \theta$$

と表せる. これは右辺の r をまとめれば

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (1.8)$$

と書ける. 複素数 z を r と θ を用いて (1.8) のように表すことを, 複素数 z の 極形式表示 という. 図より r と θ の範囲は

$$0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \theta < 2\pi \quad (1.9)$$

である.

注. (1.8) に用いられている図 2 の r は z の絶対値に等しい. つまり

$$r = |z| \quad (1.10)$$

実際, 図 2 の r は底辺の長さが $|x|$, 高さが $|y|$ の直角 3 角形の斜辺の長さだから

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{|x|^2 + |y|^2} \\ &= \sqrt{x^2 + y^2} \quad ((1.2) \text{ より}) \\ &= |z| \quad ((1.3) \text{ より}). \end{aligned}$$

問. 複素数 $-1 + i$ を

$$-1 + i = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

と極形式表示したときの r と θ を求めよ.

解. 次図 3 より, r は底辺の長さが高さが 1 の直角 3 角形の斜辺の長さだから, $r = \sqrt{2}$. また $\theta = 3\pi/4$.

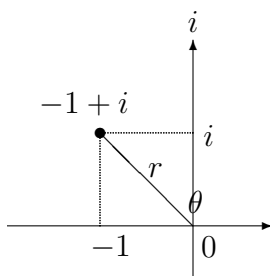


図 3: $-1 + i$ の位置

1.2 複素関数

・指数関数 e^x は次のように表せる:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \quad (1.11)$$

複素数 z の指数関数 e^z を上式の x を z に置き換えた式

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots \quad (1.12)$$

により定める. 特に $e^0 = 1$ である.

注. z がどのような複素数であっても (1.12) の無限和は収束する.

・複素数を変数とする関数 (値も一般に複素数となる) を 複素関数 と呼ぶ. z^n や e^z は複素数 z を変数とする複素関数である.

・どのような複素数 z, w に対しても

$$e^{z+w} = e^z e^w \quad (1.13)$$

が成り立つ。これより特に

$$(e^z)^n = e^z e^z \cdots e^z = e^{nz} \quad (1.14)$$

を得る。

・ e^z の定義式 (1.12) で $z = i\theta$ と置けば

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= 1 + \frac{i\theta}{1!} + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \cdots \\ &= 1 + \frac{i\theta}{1!} + \frac{-\theta^2}{2!} + \frac{-i\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \frac{i\theta^5}{5!} + \cdots \end{aligned}$$

を得る。この結果は

$$e^{i\theta} = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots\right) + i \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots\right) \quad (1.15)$$

と書ける。一方、関数 $\cos x, \sin x$ は次のように表せる：

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots, \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

(1.15) の右辺と上式を見比べれば、(1.15) は

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (1.16)$$

と書けることがわかる。この式 (1.16) は オイラーの公式 と呼ばれる。

・ (1.16) と (1.3) より

$$|e^{i\theta}| = \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}$$

であるが、 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ であるから右辺は 1 である。つまり、どのような実数 θ に対しても

$$|e^{i\theta}| = 1 \quad (1.17)$$

が成り立つ。

・ $e^{i\theta}$ の値は θ を 2π 増やすと元の値にもどる。つまり

$$e^{i(\theta+2\pi)} = e^{i\theta} \quad (1.18)$$

実際, (1.16) より

$$e^{i(\theta+n\pi)} = \cos(\theta + 2\pi) + i \sin(\theta + 2\pi) = \cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}.$$

問. $e^{(21\pi/5)i} = e^{(\pi/5)i}$ を示せ.

解. (1.18) より

$$e^{(21\pi/5)i} = e^{(21\pi/5-2\pi)i} = e^{(21\pi/5-4\pi)i} = e^{(\pi/5)i}$$

・複素数 z の極形式表示 (1.8) は, オイラーの公式 (1.16) を用いれば

$$z = re^{i\theta} \tag{1.19}$$

と表せる. これも複素数の極形式表示と呼ぶ. r と θ の範囲は (1.9) に示したとおりである.

注. 複素数 z は $z = x + iy$ の形に表すことも, 上のように $z = re^{i\theta}$ の形に表すこともできる. 状況に応じてどちらの表し方を用いる方が便利かを判断する.

注. (1.10) は z を (1.19) の形に表し, (1.17) を用いると, 次のように簡潔に示せる:

$$\begin{aligned} |z| &= |re^{i\theta}| \quad (z \text{ を (1.19) の形に表した}) \\ &= |r||e^{i\theta}| \quad ((1.4) \text{ より}) \\ &= r \cdot 1 \quad (r \geq 0 \text{ と (1.17) より}) \\ &= r \end{aligned}$$

問. 複素数の極形式表示 (1.19) を利用して

$$z^3 = -1$$

を満たす z を全て求めよ.

解. $z = re^{i\theta}$ と表すと

$$\begin{aligned} z^3 &= (re^{i\theta})^3 = r^3(e^{i\theta})^3 \\ &= r^3 e^{3i\theta} \quad ((1.14) \text{ より}) \end{aligned}$$

となる. 従って問の式は

$$r^3 e^{3i\theta} = -1 \quad (1.20)$$

という r, θ に対する式となる. この式を満たす r と θ を求める. まず上式より

$$|r^3 e^{3i\theta}| = |-1|$$

である. つまり

$$|r^3 e^{3i\theta}| = 1$$

この式は, (1.17) を用いて左辺を

$$|r^3 e^{3i\theta}| = |r^3| |e^{3i\theta}| = r^3 \cdot 1 = r^3$$

と書き直すと

$$r^3 = 1$$

という式になる. これより

$$r = 1 \quad (1.21)$$

を得る. この結果より (1.20) は

$$e^{3i\theta} = -1$$

という式となる. この式は左辺をオイラーの公式 (1.16) を用いて書き直せば

$$\cos 3\theta + i \sin 3\theta = -1$$

となる. (1.1) よりこの左辺の実数部 $\cos 3\theta$ と右辺の実数部 -1 は等しく, 左辺の虚数部 $\sin 3\theta$ と右辺の虚数部 0 (右辺は $-1 + 0i$ と見なせる) は等しくなければならない. つまり

$$\cos 3\theta = -1, \quad \sin 3\theta = 0$$

これを満たす θ で (1.9) に記した θ の範囲にあるものは

$$\theta = \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}$$

この結果と (1.21) より, 求める $z = re^{i\theta}$ は

$$z = e^{i\pi/3}, e^{i\pi}, e^{5i\pi/3}.$$

である.

注. (1.16) を用いて上の 3 つの解を

$$\begin{aligned} e^{i\pi/3} &= \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ e^{i\pi} &= \cos \pi + i \sin \pi = -1 + i0 = -1 \\ e^{5i\pi/3} &= \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{aligned}$$

と表すこともできる.

・オイラーの公式 (1.16) より

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad e^{-ix} = \cos(-x) + i \sin(-x) = \cos x - i \sin x$$

である. これら 2 式の和や差をとったものから

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

を得る. $\cos x, \sin x$ を含む式を扱う際に, これらを上のように e^{ix}, e^{-ix} を用いて表しておくで見通しが良くなる場合がある.

・対数関数 $\log x$ は

$$e^{\log x} = x$$

という性質を持つ. 複素数 z に対する $\log z$ を, 上式の x を z で置き換えた式

$$e^{\log z} = z \tag{1.22}$$

により定める. つまり $\log z$ とはこの式を満たすようなものとする. $\log z$ は z を (1.19) のように極形式表示しておく次のように見やすく表せる:

$$z = re^{i\theta} \quad (r > 0) \quad \Rightarrow \quad \log z = \log r + i(\theta + 2n\pi) \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \tag{1.23}$$

・ (1.23) を示す. このためには $\log z$ を

$$\log z = u + iv \quad (1.24)$$

と表したとき

$$u = \log r, \quad v = \theta + 2n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (1.25)$$

となることを示せばよい. まず $\log z$ を定める式 (1.22) の左辺と右辺をそれぞれ (1.24) と $z = re^{i\theta}$ を用いて書き直せば

$$e^{u+iv} = re^{i\theta}$$

となる. (1.13) より, この式は

$$e^u e^{iv} = re^{i\theta} \quad (1.26)$$

と書き直せる. この両辺の絶対値をとると,

$$|e^u e^{iv}| = |re^{i\theta}|.$$

この式の左辺と右辺を (1.4), (1.17) を用いて

$$\begin{aligned} |e^u e^{iv}| &= |e^u| |e^{iv}| = e^u \cdot 1 = e^u \\ |re^{i\theta}| &= |r| |e^{i\theta}| = r \cdot 1 = r \end{aligned}$$

と書き直せば

$$e^u = r \quad (1.27)$$

を得る. 通常の指数関数と対数関数の関係により, (1.27) から (1.25) の左式を得る. いま (1.26) に (1.27) を用いると

$$re^{iv} = re^{i\theta}$$

を得る. (1.23) に記したように $r > 0$ としているから, 上式を r で割る事ができて $e^{iv} = e^{i\theta}$ を得る. この式は, 両辺をオイラーの公式 (1.16) を使って書き直すと

$$\cos v + i \sin v = \cos \theta + i \sin \theta$$

となる。この両辺の実数部と虚数部を比較すれば

$$\cos v = \cos \theta, \quad \sin v = \sin \theta$$

であり、これより (1.25) の右式を得る。

・ (1.23) の右辺の値の中で $n = 0$ の場合を選び、また θ の範囲を $-\pi < \theta < \pi$ としたものを、 $\text{Log } z$ と書く。つまり

$$\text{Log } z = \log r + i\theta \quad (-\pi < \theta < \pi) \quad (1.28)$$

とする。角度 θ の範囲をこのようにとるのは慣習的なものである。

2 複素関数の微分

・ 実数を変数とする関数 $f(x)$ の点 x における微分は

$$\frac{df}{dx}(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

で定められる。複素数を変数に持つ関数 $f(z)$ の点 z における 微分 $\frac{df}{dz}(z)$ を、上と同じ形の式

$$\frac{df}{dz}(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \quad (2.1)$$

により定める。

・ 関数 $f(z)$ が点 z で 微分可能 であるとは、微分 (2.1) が存在するということである。つまり (2.1) の右辺の極限值が存在することである。これは複素平面上の点 Δz を どのような仕方で原点 0 に近づけても (2.1) 右辺の分数

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

が同じ値に近づくということである。例えば Δz を実軸に沿って 0 に近づけても、虚軸に沿って 0 に近づけても、上の分数は同じ値に近付かなければならない。

問. 分数

$$\frac{\overline{(z + \Delta z)} - \bar{z}}{\Delta z} \quad (2.2)$$

は、 Δz を実軸に沿って 0 に近付けたとき、どのような値に近付くか。また Δz を虚軸に沿って 0 に近付けたとき、どのような値に近付くか。関数 $\bar{z}$ は点 z で微分可能か。

解. いま Δz を $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ と表す. Δz を実軸に沿って原点 0 に近付けるとき、その虚数部 Δy は常に 0 であるから、 $\Delta z = \Delta x$. このとき

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(\overline{z + \Delta z}) - \bar{z}}{\Delta z} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\overline{z + \Delta x}) - \bar{z}}{\Delta x} \quad (\Delta z = \Delta x \text{ より}) \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\bar{z} + \overline{\Delta x}) - \bar{z}}{\Delta x} \quad ((1.6) \text{ より}) \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\bar{z} + \Delta x) - \bar{z}}{\Delta x} \quad (\Delta x \text{ は実数だから}) \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.\end{aligned}$$

つまり (2.2) は 1 に近付く. 一方、 Δz を虚軸に沿って原点 0 に近付けるときは、その実数部 Δx は常に 0 であるから、 $\Delta z = i\Delta y$. このとき

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(\overline{z + \Delta z}) - \bar{z}}{\Delta z} &= \lim_{i\Delta y \rightarrow 0} \frac{(\overline{z + i\Delta y}) - \bar{z}}{i\Delta y} \quad (\Delta z = i\Delta y \text{ より}) \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{(\bar{z} + \overline{i\Delta y}) - \bar{z}}{i\Delta y} \quad ((1.6) \text{ より}) \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{(\bar{z} - i\Delta y) - \bar{z}}{i\Delta y} \quad (i\Delta y = -i\Delta y \text{ だから}) \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{-i\Delta y}{i\Delta y} = -1.\end{aligned}$$

つまり (2.2) は -1 に近付く. 関数 $\bar{z}$ の微分は、微分の定義 (2.1) に従えば

$$\frac{d\bar{z}}{dz} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(\overline{z + \Delta z}) - \bar{z}}{\Delta z}$$

であるが、上に示したように、この右辺の分数は Δz を実軸に沿って 0 に近付けた場合と、虚軸に沿って 0 に近付けた場合では、異なる値に近付く. 従って、上式右辺の極限の値は明確に定めることができない (つまり極限は存在しない). 従って、 $\bar{z}$ は微分可能ではない.

・微分積分学における公式と同じ形の式

$$\frac{dz^n}{dz} = nz^{n-1}$$

$$\begin{aligned}\frac{d \sin z}{dz} &= \cos z \\ \frac{d \cos z}{dz} &= -\sin z \\ \frac{de^z}{dz} &= e^z \\ \frac{d \operatorname{Log} z}{dz} &= \frac{1}{z}\end{aligned}$$

が成り立つ.

・関数 z^2 は $z = x + iy$ とすると

$$z^2 = (x + iy)^2 = x^2 + 2ixy - y^2 = x^2 - y^2 + i2xy$$

と表せる. この実数部 $x^2 - y^2$ と虚数部 $2xy$ は x, y を変数とする実数値関数である. このように, 複素数 z を変数とする関数 $f(z)$ は $z = x + iy$ とするとき

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (2.3)$$

の形に表せる. ここで $u(x, y), v(x, y)$ は実数値関数である. もし $f(z)$ が z について微分可能なら, u, v は式

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y), \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) \quad (2.5)$$

を満たす. 逆に, もし (2.3) の u, v が上の2つの式を満たし, しかもこれらの式に書かれた4つの微分がどれも連続関数 (値が連続的に変化する) であれば, $f(z)$ は z について微分可能である. (2.3) の u, v に対する上の2つの式 (2.4), (2.5) を $f(z)$ に対するコーシー・リーマン条件という.

・関数 $f(z)$ が z について微分可能なら (2.3) の u, v は (2.4) と (2.5) を満たすことを示す. z と Δz を $z = x + iy, \Delta z = \Delta x + i\Delta y$ と表す. このとき

$$z + \Delta z = x + \Delta x + i(y + \Delta y)$$

であるから (2.3) の z を $z + \Delta z$ に変えると

$$f(z + \Delta z) = u(x + \Delta x, y + \Delta y) + iv(x + \Delta x, y + \Delta y)$$

となる．従って

$$\begin{aligned}\frac{df}{dz}(z) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) + i(v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y))}{\Delta x + i\Delta y}\end{aligned}\quad (2.6)$$

でとなる． $f(z)$ は z について微分可能なのだから，(2.6) の分数は $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ をどのような仕方で 0 に近付けてもある同じ値に近づく．まず Δz を実数軸に沿って 0 に近付けた場合を考える．このとき Δz の虚数部 Δy は常に 0 であり，実数部 Δx は 0 に近づく．つまり

$$\Delta y = 0, \quad \Delta x \rightarrow 0$$

このとき

$$\begin{aligned}(2.6) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y) + i(v(x + \Delta x, y) - v(x, y))}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x, y)\end{aligned}$$

となる．次に Δz を虚軸に沿って 0 に近付けた場合を考える．このとき Δz の実数部 Δx は常に 0 であり，虚数部 Δy は 0 に近づく．つまり

$$\Delta x = 0, \quad \Delta y \rightarrow 0$$

このとき

$$\begin{aligned}(2.6) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y) + i(v(x, y + \Delta y) - v(x, y))}{i\Delta y} \\ &= -i \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{\Delta y} + \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{v(x, y + \Delta y) - v(x, y)}{\Delta y} \\ &= -i \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial v}{\partial y}(x, y)\end{aligned}$$

となる．こうして得られた 2 つの (2.6) の値は同じ値であるのだから

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = -i \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial v}{\partial y}(x, y)$$

を得る. この式の実数部と虚数部を比較することにより (2.4) と (2.5) を得る.

問. 関数 e^z がコーシー・リーマン条件を満たすことを確かめよ.

解. z を $z = x + iy$ と書くと

$$\begin{aligned} e^z &= e^{x+iy} \\ &= e^x e^{iy} \quad ((1.13) \text{ より}) \\ &= e^x (\cos y + i \sin y) \quad ((1.16), \text{ より}) \\ &= e^x \cos y + i e^x \sin y \end{aligned}$$

従って e^z を (2.3) のように $e^z = u + iv$ と書くならば

$$u = e^x \cos y, \quad v = e^x \sin y$$

となる. これらを x や y について偏微分すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial e^x \cos y}{\partial x} = e^x \cos y, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial e^x \cos y}{\partial y} = -e^x \sin y, \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial e^x \sin y}{\partial x} = e^x \sin y, \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial e^x \sin y}{\partial y} = e^x \cos y \end{aligned}$$

となり, u, v は確かにコーシー・リーマン条件 (2.4),(2.5) を満たす.

・ D を複素平面内のある領域 (ある図形の内部) とする. 関数 $f(z)$ が D の全ての点で z について微分可能であるとき, $f(z)$ は領域 D で解析的であるという. 領域 D 上で定められた関数 $f(z)$ がその領域全体で解析的であるとき, $f(z)$ は D の上 解析関数 であるという.