

物理学演習 II (仲光担当分) ベクトル解析

ここでは電磁気学や流体力学で必要となるベクトル演算の基礎を学ぶ。以下では空間ベクトル

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{pmatrix}, \quad \dots$$

を考える。ベクトル $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ の内積 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ と外積 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ を次のように定める：

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (1)$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{pmatrix} A_y B_z - A_z B_y \\ A_z B_x - A_x B_z \\ A_x B_y - A_y B_x \end{pmatrix} \quad (2)$$

問 1. 次式が成り立つことを確かめよ。但し k は定数。((5) は (4) と (3) を, (7) は (6) と (3) を利用すれば直ちに得られる。)

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \quad (3)$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \quad (4)$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \quad (5)$$

$$(k\mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = k(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \quad (6)$$

$$\mathbf{A} \cdot (k\mathbf{B}) = k(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \quad (7)$$

問 2. 次式が成り立つことを確かめよ。但し k は定数。((10) は (9) と (8) を, (12) は (11) と (8) を利用すれば直ちに得られる。)

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A} \quad (8)$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{C} + \mathbf{B} \times \mathbf{C} \quad (9)$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C} \quad (10)$$

$$(k\mathbf{A}) \times \mathbf{B} = k(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \quad (11)$$

$$\mathbf{A} \times (k\mathbf{B}) = k(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \quad (12)$$

問 3. 次式が成り立つことを確かめよ。

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \quad (13)$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} \quad (14)$$

問4. 次式が成り立つことを確かめよ. (まず (13), 次に (14) を利用する.)

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \quad (15)$$

以下では微分記号 $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ をそれぞれ簡単に $\partial_x, \partial_y, \partial_z$ と書く。従って $\partial_x f = \frac{\partial f}{\partial x}$, $\partial_x^2 f = \partial_x \partial_x f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$. 関数の積の微分公式は次のように表せる：

$$\partial_x(fg) = (\partial_x f)g + f\partial_x g \quad (16)$$

$$\partial_y(fg) = (\partial_y f)g + f\partial_y g \quad (17)$$

$$\partial_z(fg) = (\partial_z f)g + f\partial_z g \quad (18)$$

∇ を次のように定める：

$$\nabla = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \quad (19)$$

∇ はナブラ (nabla) と呼ばれる。関数 f に対し ∇f を次のように定める：

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \\ \partial_z f \end{pmatrix} \quad (20)$$

(1) と (2) に従えば, (31) の ∇ とベクトル $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$ の内積 $\nabla \cdot \mathbf{A}$ と外積 $\nabla \times \mathbf{A}$ は次のようになる：

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \partial_x A_x + \partial_y A_y + \partial_z A_z \quad (21)$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \partial_y A_z - \partial_z A_y \\ \partial_z A_x - \partial_x A_z \\ \partial_x A_y - \partial_y A_x \end{pmatrix} \quad (22)$$

$\mathbf{A}$ が定数ベクトル (各成分が定数) の場合は (21), (22) の右辺にある微分は全て 0 となる。ベクトルを定数倍すると各成分が定数倍されるのと同様に, f を関数とすると

$$f\mathbf{A} = \begin{pmatrix} fA_x \\ fA_y \\ fA_z \end{pmatrix} \quad (23)$$

問5. 次式が成り立つことを確かめよ ((21), (22) の $\mathbf{A}$ を (23) に置き換えた結果に (16),(17),(18) を用いる) :

$$\nabla \cdot (f\mathbf{A}) = (\nabla f) \cdot \mathbf{A} + f(\nabla \cdot \mathbf{A}) \quad (24)$$

$$\nabla \times (f\mathbf{A}) = (\nabla f) \times \mathbf{A} + f(\nabla \times \mathbf{A}) \quad (25)$$

内積 $\nabla \cdot \nabla$ を Δ と書く. Δ はラプラシアン (Laplacian) と呼ばれる. (31) と (1) より $\nabla \cdot \nabla = \partial_x \partial_x + \partial_y \partial_y + \partial_z \partial_z = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$ である. つまり

$$\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 \quad (26)$$

以下では成分が全て 0 の零ベクトルを太文字 $\mathbf{0}$ で表し, 数の 0 と区別する.

問6. 次式が成り立つことを確かめよ.

$$\nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0} \quad (27)$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \quad (28)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A} \quad (29)$$

(1) に従えば, ベクトル $\mathbf{A}$ と (31) の ∇ の内積 $\mathbf{A} \cdot \nabla$ は次のようになる :

$$\mathbf{A} \cdot \nabla = A_x \partial_x + A_y \partial_y + A_z \partial_z \quad (30)$$

ベクトルを微分するとその各成分が微分される. 例えば

$$\partial_x \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x A_x \\ \partial_x A_y \\ \partial_x A_z \end{pmatrix} \quad (31)$$

(30) と (31) より

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} &= (A_x \partial_x + A_y \partial_y + A_z \partial_z) \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} \\ &= A_x \begin{pmatrix} \partial_x B_x \\ \partial_x B_y \\ \partial_x B_z \end{pmatrix} + A_y \begin{pmatrix} \partial_y B_x \\ \partial_y B_y \\ \partial_y B_z \end{pmatrix} + A_z \begin{pmatrix} \partial_z B_x \\ \partial_z B_y \\ \partial_z B_z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

問7. 次式が成り立つことを確かめよ (右辺と左辺を別々に計算して結果を比較するとよい) .

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \quad (32)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (33)$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} \quad (34)$$

(20) の ∇f を関数 f の勾配 (gradient), (21) の $\nabla \cdot \mathbf{A}$ をベクトル $\mathbf{A}$ の発散 (divergence), (22) の $\nabla \times \mathbf{A}$ をベクトル $\mathbf{A}$ の回転 (rotation) と呼ぶ. このことから, $\nabla f, \nabla \cdot \mathbf{A}, \nabla \times \mathbf{A}$ をそれぞれ $\text{grad } f, \text{div } \mathbf{A}, \text{rot } \mathbf{A}$ と書くことがある (rot $\mathbf{A}$ の代わりに curl $\mathbf{A}$ という記号が使われることもある) :

$$\text{div } \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A}, \quad \text{rot } \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \text{grad } f = \nabla f$$