

1 1変数関数のフーリエ変換

1.1 1変数のデルタ関数

x 軸上に電荷密度 $\rho(x)$ で分布する電荷があるとき、電荷密度 $\rho(x)$ を区間 $[a, b]$ で積分したもの

$$\int_a^b \rho(x) dx$$

は、この区間 $[a, b]$ 内にある電荷の総量となる。いま x 軸原点の 1 点にのみ値 1 の電荷があるとする。この場合、原点以外には電荷がないから、原点以外では電荷密度 $\rho(x)$ は 0 である。また x 軸上にある電荷の総量は 1 である。つまりこの場合

$$\rho(x) = 0, \quad x \neq 0 \quad (1.1)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) dx = 1 \quad (1.2)$$

である。物理学や工学では上の 2 つの条件を満たす関数 $\rho(x)$ を $\delta(x)$ と書いてデルタ関数と呼ぶ。ここではデルタ関数 $\delta(x)$ を使い勝手のよい別の言い方で定める。

次の性質を持つ $\delta(x)$ をデルタ関数と呼ぶ：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0) \quad (1.3)$$

注. (1.3) を満たす関数 $\delta(x)$ は実は存在しない。この問題は $\delta(x)$ を関数ではなく超関数という種類のものと考えれば回避できる。物理や工学での計算においては $\delta(x)$ を関数として扱っても差し支えない。

(1.3) から次式を得る：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a) f(x) dx = f(a) \quad (1.4)$$

$$\delta(-x) = \delta(x) \quad (1.5)$$

(1.5) より $\delta(x - a) = \delta(a - x)$ となるから (1.6) は

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(a - x) f(x) dx = f(a) \quad (1.6)$$

と書くこともできる.

問1. (1.3) から (1.6) を導け. (1.6) を示すためには, まず $y = x - a$ と置くと

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a) f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y) f(y + a) dy$$

となることを示し, 次に右辺の $f(y + a)$ を $g(y)$ と書いて (1.3) を用いよ.

問2. (1.3) から (1.5) を導け. このためには $\delta(-x)$ が $\delta(x)$ の定義式 (1.3) と同じ式を満たすこと, つまり

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(-x) f(x) dx = f(0)$$

が成り立つことを示せばよい. 左辺を $y = -x$ と置いて書き直し (1.3) を用いる.

デルタ関数 $\delta(x)$ は次のように表せる:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk \quad (1.7)$$

従って

$$\delta(x - a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-a)} dk \quad (1.8)$$

1.2 1 変数関数のフーリエ変換

関数 $f(x)$ ($-\infty < x < \infty$) の フーリエ変換 とは, 次式で定められる関数 $\hat{f}(k)$ ($-\infty < k < \infty$) のことである:

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x) dx \quad (1.9)$$

問1. $f(x) = e^{-|x|}$ のとき, $f(x)$ のフーリエ変換 $\hat{f}(k)$ を求めよ.

α, β を実数定数とする. $\beta > 0$ なら

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x - \beta x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} e^{-\alpha^2/4\beta} \quad (1.10)$$

が成り立つ. ($\beta < 0$ であると $e^{ikx}e^{-\beta x^2}$ は $x \rightarrow \pm\infty$ で 0 に近付かないので左辺の積分は有限な値をとらない).

問 2. 上式 (1.10) を利用して e^{-ax^2} ($a > 0$) のフーリエ変換を求めよ.

関数 $f(x)$ の n 階導関数のフーリエ変換は, $f(x)$ のフーリエ変換に $(ik)^n$ を掛けたものに等しい. つまり次式が成り立つ:

$$\widehat{\frac{d^n f}{dx^n}}(k) = (ik)^n \hat{f}(k) \quad (1.11)$$

問 3. (1.11) は $n = 1$ の場合

$$\widehat{\frac{df}{dx}}(k) = ik \hat{f}(k) \quad (1.12)$$

と書ける. $f(x)$ が $f(x) \rightarrow 0$ ($x \rightarrow \pm\infty$) という性質を持つ場合には, 上式は部分積分法を利用するだけで確かめられる. これを実行せよ.

問 4. (1.12) から (1.11) を導け.

パーセバルの等式と呼ばれる次の等式が成り立つ:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\hat{f}(k)} \hat{g}(k) dk = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)} g(x) dx \quad (1.13)$$

問 8. デルタ関数の表示式 (1.7) とデルタ関数の性質 (1.6) を利用して (1.13) を導け. このために, まず複素共役の性質

$$\overline{\int_a^b f(x) dx} = \int_a^b \overline{f(x)} dx$$

と $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ を用いて

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\hat{f}(k)} \hat{g}(k) dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \overline{f(x)} dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx'} g(x') dx' \right) dk$$

となることを示せ. 1つの式に同じ記号 dx が2度使われないように, 上の右側の括弧内の積分変数には x ではなく x' を用いた. 上の各積分の積

分区间はどの変数にも無関係な固定された区間 $(-\infty, \infty)$ なので，上式の積分記号はいったん左端にまとめることができ，上式を

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\cdots) dx dx' dk$$

の形に書き直せる．この積分を (1.8) の形の積分が出てくるように積分順序の変更などによって変型し，(1.6) を用いよ．

関数 $f(x)$ と $g(x)$ の 合成積 $f * g(k)$ は次式で定められる：

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - x') g(x') dx' \quad (1.14)$$

合成積は次の性質を持つ：

$$f * g(x) = g * f(x) \quad (1.15)$$

.

問5．どの点 $x = x_0$ でも $f * g(x_0) = g * f(x_0)$ が成り立つことを示せ．

関数の積 $f(x)g(x)$ のフーリエ変換について，次式が成り立つ：

$$\widehat{fg}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{f} * \hat{g}(k) \quad (1.16)$$

この右辺の合成積は合成積の定義 (1.14) より

$$\hat{f} * \hat{g}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k - k') \hat{g}(k') dk' \quad (1.17)$$

である．

問6．デルタ関数の表示式 (1.8) を利用して (1.16) を示せ．このために (1.16) の右辺を書き直し，これが左辺と等しくなることを示す．(1.8) の右辺の合成積 (1.17) は

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k-k')x} f(x) dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik'x'} g(x') dx' \right) dk'$$

と表せる．1つの式に同じ記号 dx が2度使われないように，上の右側の括弧内の積分変数には x ではなく x' を用いた．上の各積分の積分区間は

どの変数にも無関係な固定された区間 $(-\infty, \infty)$ なので, 上式の積分記号はいったん左端にまとめることができ, 上式を

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\cdots) dx dx' dk'$$

の形に書き直せる. この積分を (1.8) の形の積分が出てくるように積分順序の変更などによって変型し, (1.6) を用いよ.

1.3 1 変数関数の逆フーリエ変換

関数 $f(k)$ ($-\infty < k < \infty$) の逆フーリエ変換とは, 次式で定められる関数 $\check{f}(x)$ ($-\infty < x < \infty$) のことである:

$$\check{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} f(k) dk \quad (1.18)$$

フーリエ変換の定義式 (1.9) と比較せよ.

関数 $f(x)$ のフーリエ変換 $\hat{f}(k)$ の逆フーリエ変換 $\check{\check{f}}(x)$, つまり

$$\check{\check{f}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \hat{f}(k) dk \quad (1.19)$$

は元の関数 $f(x)$ となる. このことは次のように表せる L

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \hat{f}(k) dk \quad (1.20)$$

問 1. デルタ関数の表示式 (1.8) を利用して上式 (1.21) を示せ. (1.21) の右辺は

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx'} f(x') dx' \right) dk \quad (1.21)$$

と表せる. x という変数は e^{ikx} の部分で使われているので, 括弧内の積分の変数には記号を x' を用いた.

次式が成り立つ:

$$((ik)^n \hat{f})^\sim(x) = \frac{d^n f}{dx^n}(x) \quad (1.22)$$

ここで $(\cdots)^\sim$ は括弧内の関数のフーリエ逆変換を行うことを表す.

問 2. 上式 (1.22) が成り立つことを示せ.

2 1 変数関数のフーリエ変換の応用

2.1 パラメータ t を持つ関数のフーリエ変換

x の他に変数 t を持つ関数 $f(t, x)$ の x についてのフーリエ変換とは、 t を固定してこの関数を x の関数とみなし、以前と同じく

$$\hat{f}(t, k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(t, x) dx \quad (2.1)$$

とフーリエ変換することである。左辺が k の他に t という変数も含むのは、右辺が t を含むからである。同様に、関数 $f(t, k)$ の k についての逆フーリエ変換とは、この関数を k の関数とみて以前と同じく

$$\check{f}(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} f(t, k) dk \quad (2.2)$$

と逆フーリエ変換することである。以下でフーリエ変換というときは x についてのフーリエ変換、逆フーリエ変換というときは k についての逆フーリエ変換を意味する。

関数 $f(t, x)$ を t 微分してから x についてフーリエ変換しても、 x についてフーリエ変換してから t 微分しても結果は同じである。つまり

$$\widehat{\frac{\partial f}{\partial t}}(t, k) = \frac{\partial \hat{f}}{\partial t}(t, k) \quad (2.3)$$

問1. 上式 (2.3) を示せ。

2.2 1 次元熱伝導方程式

1 次元熱伝導方程式とは

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x)$$

の形の方程式である。ここで α は正の定数である。 $u(t, x)$ は時刻 t に x 軸上の点 x にある熱量を表す。上式の解 $u(t, x)$ を求めれば、熱が時間とともにどのように広がっていくかを知ることができる。1次元熱伝導方程式は、熱の問題の他に時間とともに拡散していく量を扱うときに用い

られる.

1 次元熱伝導方程式に対する初期値問題

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x), \quad (2.4)$$

$$u(0, x) = u_0(x) \quad (2.5)$$

を考える. ここで $u_0(x)$ は与えられた関数であり, 関数 $u(t, x)$ の時刻 $t = 0$ における初期値と呼ばれる. 上の初期値問題の解とは (2.4) を満たす関数 $u(t, x)$ で初期条件 (2.5) を満たすもののことである.

上の初期値問題の解 $u(t, x)$ をフーリエ変換を利用して求める. (2.4) の両辺と (2.5) の両辺に x についてのフーリエ変換を施すと, 求める解 $u(t, x)$ のフーリエ変換 $\hat{u}(t, k)$ の満たすべき式が得られ, 次のようなものとなる:

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(t, k) = -\alpha k^2 \hat{u}(t, k), \quad (2.6)$$

$$\hat{u}(0, k) = \hat{u}_0(k) \quad (2.7)$$

求める解 $u(t, x)$ はこれら 2 式を満たす $\hat{u}(t, k)$ を求めて, それを逆フーリエ変換すれば得られる.

問 1. (2.4) の両辺をフーリエ変換すると (2.6) となることを示せ.

式 (2.4) と (2.7) を満たす $\hat{u}(t, k)$ は次のようなものとなる:

$$\hat{u}(t, k) = \hat{u}_0(k) e^{-\alpha k^2 t} \quad (2.8)$$

問 2. (2.4), (2.7) から (2.8) を導け.

求める初期値問題 (2.4), (2.5) の解 $u(t, x)$ のフーリエ変換は (2.8) で与えられることがわかった. この $u(t, x)$ のフーリエ変換 (2.8) の逆フーリエ変換は $u(t, x)$ である. 従って,

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \hat{u}(t, k) dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} e^{-\alpha k^2 t} \hat{u}_0(k) dk$$

である。こうして熱伝導方程式に対する初期値問題 (2.4),(2.5) の解が

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx - \alpha k^2 t} \widehat{u_0}(k) dk \quad (2.9)$$

で与えられることがわかった。この解 (2.9) は次のように書き直すことができる：

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2/4\alpha t} u_0(y) dy \quad (2.10)$$

これは熱伝導方程式に対する初期値問題の解を表すよく知られた公式である。

問 3. (1.10) を利用して (2.9) から (2.10) を導け。このために、まず (2.9) の右が

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-y) - \alpha k^2 t} dk \right) u_0(y) dy$$

の形に書き直せることを示せ。

2.3 1次元シュレディンガー方程式

x 軸上を運動する量子力学的粒子に対する 1次元シュレディンガー方程式は

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(t, x) + V(x) \psi(t, x) \quad (2.11)$$

$V = 0$ の場合、粒子が力を受けていない。この場合自由粒子の場合は

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(t, x) \quad (2.12)$$

$$\alpha = \frac{\hbar}{2m}$$

$\alpha = \frac{\hbar}{2m}$ と置けば

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}(t, x) = i\alpha \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(t, x) \quad (2.13)$$

と書ける。これは上の 1次元熱伝導方程式の α を $i\alpha$ に置き換えたものに他ならない。従ってこの 1次元シュレディンガー方程式に対する初期値問題

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}(t, x) = i\alpha \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(t, x), \quad \psi(0, x) = \psi_0(x) \quad (2.14)$$

の解は，上の熱伝導方程式に対する初期値問題の解の α を $i\alpha$ に置き換えた

$$\psi(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi i \alpha t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x-x')^2/4\alpha t} \psi_0(x') dx' \quad (2.15)$$

であると予想できる．

問6．この $\psi(t, x)$ が上のシュレディンガー方程式に対する初期値問題を満たすことを確かめよ．

3 多変数関数のフーリエ変換

3.1 記号

以下では次の記法を用いる

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} &= k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3, \\ x = |\mathbf{x}| &= \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}, \quad k = |\mathbf{k}| = \sqrt{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}}, \\ f(\mathbf{x}) &= f(x_1, x_2, x_3), \quad f(\mathbf{k}) = f(k_1, k_2, k_3), \\ \int_{\mathbf{R}^3} f d^3x &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f dx_1 dx_2 dx_3, \\ \int_{\mathbf{R}^3} f d^3k &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f dk_1 dk_2 dk_3 \end{aligned}$$

3.2 3変数のデルタ関数

1変数のデルタ関数の場合と同様に，デルタ関数 $\delta(\mathbf{x})$ を定める式は

$$\int_{\mathbf{R}^3} \delta(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) d^3x = f(\mathbf{0}) \quad (3.1)$$

である．ベクトル記法を用いずに上式を書けば

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x_1, x_2, x_3) f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 = f(0, 0, 0) \quad (3.2)$$

この式より

$$\delta(x_1, x_2, x_3) = \delta(x_1)\delta(x_2)\delta(x_3) \quad (3.3)$$

であることがわかる.

問1. (3.3) の $\delta(x_1, x_2, x_3)$ に対し (3.2) が成り立つことを (1.3) を用いて示せ. このために

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x_1)\delta(x_2)\delta(x_3)f(x_1, x_2, x_3)dx_1dx_2dx_3 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x_3) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x_2) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x_1)f(x_1, x_2, x_3)dx_1 \right) dx_2 \right) dx_3 \end{aligned}$$

と掛けることを用いよ.

1 変数のデルタ関数の場合と同様に, (3.1) から次式を得る:

$$\int_{\mathbf{R}^3} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{a})f(\mathbf{x})d^3x = f(\mathbf{a}) \quad (3.4)$$

$$\delta(-\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x}) \quad (3.5)$$

(3.5) より $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{a}) = \delta(\mathbf{a} - \mathbf{x})$ となるから (3.6) は

$$\int_{\mathbf{R}^3} \delta(\mathbf{a} - \mathbf{x})f(\mathbf{x})d^3x = f(\mathbf{a}) \quad (3.6)$$

と書くこともできる.

デルタ関数 $\delta(\mathbf{x})$ は次のように表せる:

$$\delta(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbf{R}^3} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d^3k \quad (3.7)$$

従って

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{a}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbf{R}^3} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a})} d^3k \quad (3.8)$$

問2. (3.7) を (3.3) と 1 変数のデルタ関数の表示式 (1.7) を用いて導け.

3.3 3変数関数のフーリエ変換

関数 $f(\mathbf{x})$ のフーリエ変換 $\hat{f}(\mathbf{k})$ は次式で定められる:

$$\hat{f}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} f(\mathbf{x}) d^3x \quad (3.9)$$

ベクトル記法を用いずに上式を書けば

$$\begin{aligned}\hat{f}(k_1, k_2, k_3) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3)} \\ &\quad \times f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3\end{aligned}\quad (3.10)$$

となる. この式は次のように書き直せる:

$$\begin{aligned}\hat{f}(k_1, k_2, k_3) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik_3 x_3} \\ &\quad \times \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik_2 x_2} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik_1 x_1} f(x_1, x_2, x_3) dx_1 \right) dx_2 \right) dx_3\end{aligned}$$

この式からわかるように, フーリエ変換 $\hat{f}(k_1, k_2, k_3)$ は, $f(x_1, x_2, x_3)$ に x_1 についてのフーリエ変換を施し, その結果に x_2 についてのフーリエ変換を施し, その結果に x_3 についてフーリエ変換したものにならない.

問1. (1.10) を利用して $f(\mathbf{x}) = e^{-a\mathbf{x}^2}$ ($a > 0$) のフーリエ変換 $\hat{f}(\mathbf{k})$ を求めよ. ($x = |\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$)

1 変数関数のフーリエ変換の場合と同様に, 次式が成り立つ:

$$\widehat{\frac{\partial^n f}{\partial x_j^n}}(\mathbf{k}) = (ik_j)^n \hat{f}(\mathbf{k}) \quad (3.11)$$

$$\widehat{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}}(\mathbf{k}) = (ik_i)(ik_j) \hat{f}(\mathbf{k}) \quad (3.12)$$

$$\int_{\mathbf{R}^3} \overline{\hat{f}(\mathbf{k})} \hat{g}(\mathbf{k}) d^3 k = \int_{\mathbf{R}^3} \overline{f(\mathbf{x})} g(\mathbf{x}) d^3 x \quad (3.13)$$

問2. $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ とするとき, $\Delta f(\mathbf{x})$ のフーリエ変換を求めよ.

関数 $f(\mathbf{x})$ と $g(\mathbf{x})$ の合成積 $f * g(\mathbf{x})$ は次式で定められる:

$$f * g(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{R}^3} f(\mathbf{x} - \mathbf{x}') g(\mathbf{x}') d^3 x' \quad (3.14)$$

次式が成り立つ:

$$f * g(\mathbf{x}) = g * f(\mathbf{x}) \quad (3.15)$$

関数の積 $f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})$ について次式が成り立つ：

$$\widehat{fg}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \hat{f} * \hat{g}(\mathbf{k}) \quad (3.16)$$

右辺の合成積は (3.14) より

$$\hat{f} * \hat{g}(\mathbf{k}) = \int_{\mathbf{R}^3} \hat{f}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \hat{g}(\mathbf{k}') d^3 k' \quad (3.17)$$

である。

3.4 3変数関数の逆フーリエ変換

関数 $f(\mathbf{k})$ の逆フーリエ変換 $\check{f}(\mathbf{x})$ は次式で定められる：

$$\check{f}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbf{R}^3} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} f(\mathbf{k}) d^3 k \quad (3.18)$$

関数 $f(\mathbf{x})$ のフーリエ変換 $\hat{f}(\mathbf{k})$ の逆フーリエ変換 $\check{\check{f}}(\mathbf{x})$ は元の関数 $f(\mathbf{x})$ となる。つまり

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbf{R}^3} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \hat{f}(\mathbf{k}) d^3 k \quad (3.19)$$

問1. デルタ関数の表示式 (3.8) を利用して (3.19) を示せ。

問2. $\text{div} \mathbf{A} = 0$

4 3変数関数のフーリエ変換の応用

4.1 ポアッソン方程式

ポアッソン方程式

$$-\Delta u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \quad (4.1)$$

$$-\Delta G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (4.2)$$

グリーン関数

$$g(\mathbf{x}) = G(\mathbf{x}, \mathbf{a})$$

$$-\Delta g(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \quad (4.3)$$

$$k^2 \hat{g}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}} \quad (k = \sqrt{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}}) \quad (4.4)$$

$$\hat{g}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}}}{k^2} \quad (4.5)$$

$$g(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbf{R}^3} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \hat{g}(\mathbf{k}) d^3 k = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbf{R}^3} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \frac{e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}}}{k^2} d^3 k \quad (4.6)$$

$$g(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbf{R}^3} \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a})}}{k^2} d^3 k \quad (4.7)$$

$$k_1 = k \sin \theta \cos \phi$$

$$k_2 = k \sin \theta \sin \phi$$

$$k_3 = k \cos \theta$$

k_3 座標軸をベクトル $\mathbf{x} - \mathbf{a}$ の向きにとる.

$$\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) = |\mathbf{k}| |\mathbf{x} - \mathbf{a}| \cos \theta = k |\mathbf{x} - \mathbf{a}| \cos \theta \quad (4.8)$$

$$d^3 k = dk_1 dk_2 dk_3 = k^2 \sin \theta dk d\theta d\phi \quad (4.9)$$

$$g(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{a}|\cos\theta} \sin \theta dk d\theta d\phi \quad (4.10)$$

$$\int_0^\pi e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{a}|\cos\theta} d\theta = \left[\frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{a}|t}}{ik|\mathbf{x}-\mathbf{a}|} \right]_{t=-1}^{t=1} = \frac{2 \sin k|\mathbf{x}-\mathbf{a}|}{k|\mathbf{x}-\mathbf{a}|}$$

$$g(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{2 \sin k|\mathbf{x}-\mathbf{a}|}{k|\mathbf{x}-\mathbf{a}|} dk = \frac{1}{2\pi^2 |\mathbf{x}-\mathbf{a}|} \int_0^\infty \frac{\sin k}{k} dk \quad (4.11)$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin k}{k} dk = \frac{\pi}{2} \quad (a, b > 0)$$

$$I = \int_0^\infty e^{-ax} \frac{\sin bk}{k} dk$$

$$\frac{dI}{db} = \int_0^\infty e^{-ax} \cos bk dk = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

$$I = \int \frac{a}{a^2 + b^2} db = \tan^{-1} \frac{b}{a} + C$$

$$b = 0 \quad \Rightarrow \quad I = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 0$$

$$\int_0^\infty e^{-ax} \frac{\sin bk}{k} dk = \tan^{-1} \frac{b}{a}$$

$$b = 1, a \rightarrow \infty$$

$$g(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{a}|} \quad (4.12)$$

クーロンポテンシャル

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (4.13)$$

$$-\Delta G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

$$-\Delta u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$$

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{R}^3} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') f(\mathbf{x}') d^3x'$$

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbf{R}^3} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} f(\mathbf{x}') d^3x'$$

$$\begin{aligned} -\Delta u(\mathbf{x}) &= -\Delta \int_{\mathbf{R}^3} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') f(\mathbf{x}') d^3x' \\ &= \int_{\mathbf{R}^3} (-\Delta G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')) f(\mathbf{x}') d^3x' \\ &= \int_{\mathbf{R}^3} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') f(\mathbf{x}') d^3x' = f(\mathbf{x}) \end{aligned}$$